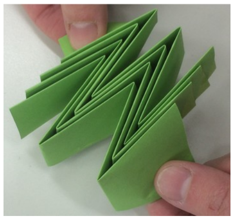
Die Themen der Gruppenarbeit

Mathematisches Papierfalten

Mit Origami haben sich sicherlich viele von Euch schon mehr oder weniger ausführlich beschäftigt – eine Jahrtausende alte Kunst. Es ist jedoch noch gar nicht so lange her, dass sich Wissenschaftler begannen für Origami zu interessieren.



In den 1970’er Jahren erfand Koryo Miura eine Falttechnik, die es erlaubt beispielsweise einen großen Spiegel zusammengefaltet mit einer Rakete ins Weltall zu schicken und dort zu entfalten.

Diese Technik wurde und wird nun weiterentwickelt, um nicht nur flache sondern auch gekrümmte Objekte zu falten. Dies hat nicht nur Anwendungen im makroskopischen Bereich wie der Architektur sondern auch im mikroskopischen Bereich wie zum Beispiel der Chirurgie.

Wir wollen uns mit der mathematischen Seite des Papierfaltens beschäftigen. Wann zum Beispiel lassen sich Faltungen (wie die oben erwähnte Spiegelfaltung) flach zusammendrücken?
Wie sieht das bei einzelnen „Knoten“ in einem Falzmuster aus?
Wie bei mehreren „Knoten“?

Was ist eigentlich alles mit Papierfalten möglich? Sind nicht Konstruktionen mit Zirkel und Lineal viel besser? Beim Papierfalten können wir schließlich keine Kreise „falten“ .

Trotzdem ist es tatsächlich so, dass wir durch das Falten von Papier Probleme lösen können, die wir mit Zirkel und Lineal nicht lösen können – z.B. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels oder die Verdoppelung eines Würfels.

Wir werden uns aber nicht nur ansehen, wie das geht sondern auch warum die Faltungen wirklich die gewünschten Resultate liefern. Weiter wollen wir klären, ob es auch umgekehrt Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gibt, die nicht durch „Papierfalten“ erreicht werden können. Und natürlich werden wir auch viele Faltungen ausprobieren.

Skalarprodukträume

Die Menge C ([0, 1]) aller auf dem Intervall [0, 1] definierten stetigen reellwertigen Funktionen wird zu einem Beispiel für einen Skalarproduktraum, wenn man für zwei Funktionen u, v ∈ C ([0, 1]) die Zahl

$$\int_0^1 u(x)v(x)dx$$

als Skalarprodukt von u und v deklariert. Man sagt, u und v seien zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Beispielsweise sind für $n \neq m$ die Funktionen e_n und e_m zueinander orthogonal, wenn man

$e_n(x) := \sin(n\pi x)$ für $x \in [0,1]$, n = 1, 2,..., setzt.

Das Skalarprodukt gestattet die Übertragung einer Rede- und Denkweise, die aus der Geometrie des dreidimensionalen Raums bekannt ist, auf die Elemente von C([0,1]). Es hat sich herausgestellt, dass das für die Lösung von Aufgaben hilfreich ist, die zunächst nichts mit Geometrie zu tun haben. Die Arbeit der Gruppe umfasst folgende Punkte:

1. Es wird erklärt, was man allgemein unter einem Skalarprodukt und einem Skalarproduktraum versteht.
2. Es werden unterschiedliche konkrete Beispiele von Skalarprodukträumen angegeben.
3. Es wird gezeigt, dass man überall dort, wo man über ein Skalarprodukt verfügt, auch über den Abstand zweier Objekte und über den Winkel zwischen zwei Objekten reden kann.
4. Es wird der Begriff der orthogonalen Projektion eingeführt und seine Bedeutung für Approximationsfragen deutlich gemacht.

In dem zu Beginn angeführten Beispiel lautet eine Approximationsfrage etwa: Wie kann man eine gegebene Funktion $u \in C([0, 1])$ bestmöglich durch eine Überlagerung von Sinusschwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen und Amplituden approximieren,

d. h. durch eine Funktion der Form $\int_{n=1}^{N} a_n e_n$ annähern?

(Die Zahl n repräsentiert die Frequenz und die reelle Zahl a_n die zugehörige Amplitude.)

Es wird angestrebt, dass ein Computerprogramm erarbeitet wird, mit dessen Hilfe die gerade erwähnte Approximation an ausgewählten Funktionen u veranschaulicht werden kann.

Wir steuern einen Mini-Roboter!

Ist der kürzeste Weg für einen Roboter zum Ziel um ein paar Hindernisse herum auch immer der schnellste Weg zum Ziel?

Wir lernen eine Methode kennen, mit deren Hilfe man schnellere Wege zum Ziel finden kann. Es ist die Methode der Interpolation. Diese ermöglicht uns, geeignete (Weg-) Funktionen zu bestimmen, die durch gegebene Punkte im Raum verlaufen (abhängig von der Lage der Hindernisse). Wir untersuchen verschiedene Arten von Interpolation, lernen Wege zur Berechnung solcher Funktionen kennen und programmieren die entwickelten Algorithmen.

Am Ende testen wir an unserem Mini-Roboter, welcher Weg am schnellsten zum Ziel führt.

Wie lange dauert es (im Mittel)bis. . . ?

- beim Mensch-Ärgere-Dich-nicht-Spiel warten wir auf die erste Sechs,
- beim Bingo auf zwei volle Reihen, . . .

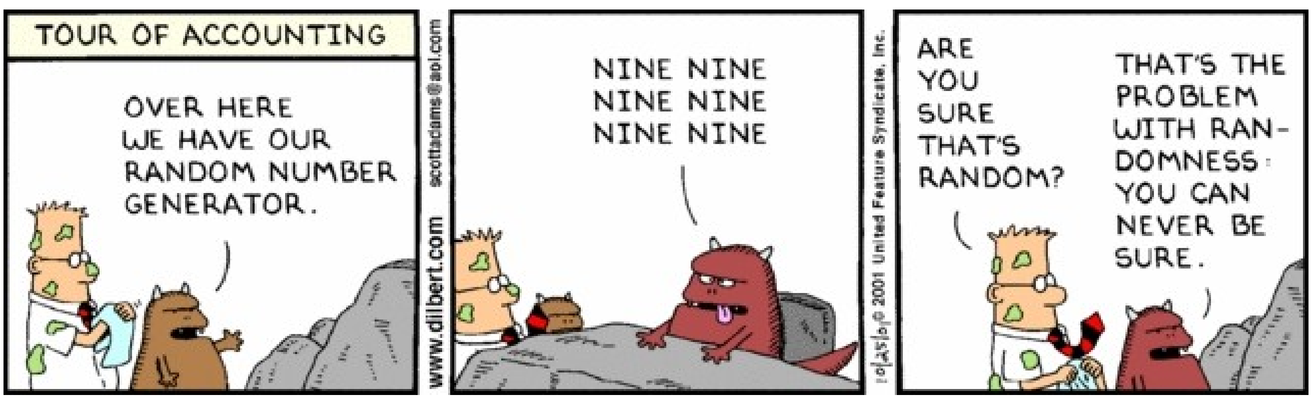
Sammler warten auf die vollständige Serie, Roulettespieler sind von Serien mit nur ROT oder nur SCHWARZ irritiert, . . .

Das bekannte Geburtstagsparadoxon ist eine Variante des Wartens auf die erste Kollision.

Allen diesen Problemen ist gemeinsam, dass der Zufall eine Rolle spielt und stochastische Modelle erforderlich sind, um Aussagen über Wahrscheinlichkeiten oder Erwartungswerte von Wartezeiten zu beweisen. Zuweilen wird uns erst das Zusammenspiel von Kombinatorik und Analysis zu einer Lösung führen.

Wir werden vielleicht die eine oder andere Intuition überprüfen und korrigieren müssen. Dabei können Simulationen unseren Erfahrungsschatz schnell vergrößern.

Die Probleme sind alle mit diskreten Modellen zu bewältigen. Wir treffen dabei auch auf Bekanntes aus der Stochastik in der Schule.



Polygonalzahlen und Figurierte Zahlen

Der einzigartige erkenntnistheoretische Charakter der Mathematik, in dessen Zentrum der mathematische Beweis steht, entwickelte sich, historisch gesehen, im Kulturkreis der griechischen Antike. Dabei spielte die geometrische Veranschaulichung anhand von Zahlenmustern eine zentrale Rolle. Die Methode der figurierten Zahlen setzte, auf der Mathematik der Babylonier basierend, in systematischer Form etwa mit Pythagoras von Samos um ca. 600-500 v.Chr. ein. Die Lehre der Pythagoreer von „Gerade und Ungerade" lieferte Erkenntnisse bis hin zu den vollkommenen Zahlen (vgl. van der Waerden). Der Neupythagoreer Nikomachos von Gerasa, ca. 60-120 n.Chr., beschäftigte sich intensiv mit Dreiecks-, Vierecks- und Fünfecks- zahlen. Geschicktes Legen von Zahlenmustern, oft auf der Basis der Verwendung von Winkelhaken („Gnomonen"), lieferte in unmittelbarer Weise erste nichttriviale Erkenntnisse über Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Pentagonalzahlen, u.s.w.

Auch große Mathematiker arbeiteten gelegentlich mit der Technik der figurierten Zahlen oder vergleichbaren Methoden. Von C.F. Gauss wird der Legende nach berichtet, dass er als junger Schüler die Aufgabe seines Lehrers, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, löste, indem er die Zahlenreihen 1, 2, 3, ..., 100 zweimal aufschrieb; einmal in der natürlichen und einmal in der umgekehrten Reihenfolge. Er erkannte, dass alle dadurch gegebenen 100 „Spaltensummen" gleich 101 waren und ermittelte so in kürzester Zeit das Ergebnis. Diese Vorgehensweise lässt sich problemlos verallgemeinern und liefert in paradigmatischer Weise die Formel $1 + 2 + 3 + ... + n = n \cdot (n + 1)/2$.

Wenn sich heute auch all diese Ergebnisse formal auf der Basis der vollständigen Induktion beweisen lassen, so liefert die Technik des Arbeitens mit figurierten Zahlen in der Regel den Ausgangspunkt für den heuristischen Prozess, der zu den entsprechenden Hypothesenbildungen führt. Oft sind auch die „Beweise" durch die Methode der figurierten Zahlen so unmittelbar klar und einleuchtend, dass sich ein formaler Induktionsbeweis erübrigt.

Und schließlich gilt: Lässt sich ein- und derselbe Sachverhalt unabhängig voneinander auf unterschiedliche Weise mehrfach begründen oder beweisen, so schafft dies Vertrauen in die gewählten Methoden und erzeugt oft neue Erkenntnisse. Im gewählten Themenbereich ergänzen und befruchten sich die Methoden „figurierte Zahlen als Punktmuster", „Zahlenmuster" und „vollständige Induktion" gegenseitig.

- Conway J.H., Guy R.K.: The Book of Numbers; Springer Verlag (Copernicus Imprint), New York 1996
- Gardner M.: Beweise algebraischer Formeln durch Betrachtung graphischer Darstellungen; Didaktik der Mathematik, Heft 2, 1974, 314-320
- GazalŽ M. J.: Gnomon: From Pharaohs to Fractals, Princeton University Press, Princeton 1999
- Nelsen R. B.: Proofs Without Words – Exercises in Visual Thinking; The Mathematical Association of America, Washington DC 1993
- Posamentier A.S., Lehmann I.: The Fabulous Fibonacci Numbers, Prometheus Books, Amherst, New York 2007
- van der Waerden B.L.: Erwachende Wissenschaft; Birkhäuser Verlag, Basel 1966
- Worobjow N.N.: Die Fibonaccischen Zahlen; Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971
- Quelle: Text und Abbildungen aus dem Flyer Sommerschule der HUB zu Berlin